أمثلة

1. ليكن n عدداً صحيحاً و $S = \{1, 2, \dots, n-1\}$ والعملية $*$ في S بالشكل التالي

$s_1 * s_2 =$ باقي قسمة $s_1 s_2$ على n ، $s_1, s_2 \in S$

أي

$$s_1 * s_2 = s_1 s_2 \pmod{n}$$

بيّن أن $(S, *)$ نصف زمرة تبديلية

2. لتكن S مجموعة الدوال المستمرة للمتغيرين x و y والمعرفة في المربع $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$ والعملية $*$ في S بالشكل $\forall f_1(x,y), f_2(x,y) \in S$

$$f_1(x,y) * f_2(x,y) = \int_0^a f_1(x,t)\, f_2(x,t)\, dt$$

بيّن أن $(S, *)$ نصف زمرة شاملة.

الحل: $f_1(x,y) = x+y$ ، $f_2(x,y) = xy$ ، $f_3(x,y) = x-2y$

لنثبت أن $f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3$

$$f_2 * f_3 = \int_0^a xt(t-2y)\,dt = \int_0^a (xt^2 - 2xyt)\,dt$$

$$= \left[\frac{xt^3}{3} - xyt^2\right]_0^a = \frac{a^3 x}{3} - a^2 xy$$

$$f_1 * (f_2 * f_3) = \int_0^a (x+t)\left(\frac{a^3 t}{3} - a^2 t y\right) dt = \int_0^a \Big(\frac{a^3 x t}{3} - a^2 x y t$$

$$+ \frac{a^3 t^2}{3} - a^2 t^2 y\Big)\, dt = \left[\frac{a^3 x t^2}{6} - \frac{a^2 x y t^2}{2} + \frac{a^3 t^3}{9} - \frac{a^2 t^3 y}{3}\right]_0^a$$

$$= \frac{a^5}{2} x - \frac{a^4}{2} xy + \frac{a^6}{9} - \frac{a^5}{3} y$$

$$f_1 * f_2 = \int_0^a (x+t)\, t y\, dt = \int_0^a (xyt + yt^2)\, dt = \left[\frac{xyt^2}{2} + \frac{yt^3}{3}\right]_0^a$$

$$= \frac{xya^2}{2} + \frac{a^3 y}{3}$$

$$(f_1 * f_2) * f_3 = \int_0^a \left(\frac{a^2 x t}{2} + \frac{a^3 t}{3}\right)(t - 2y)\, dt = \int_0^a \Big(\frac{a^2 x t^2}{2} - a^2 x y t$$

$$+ \frac{a^3 t^2}{3} - \frac{2a^3 y t}{3}\Big)\, dt = \left[\frac{a^2 x t^3}{6} - \frac{a^2 x y t^2}{2} + \frac{a^3 t^3}{9} - \frac{a^3 y t^2}{3}\right]_0^a$$

$$= \frac{a^5 x}{6} - \frac{a^4 x y}{2} + \frac{a^6}{9} - \frac{a^5 y}{3}$$

أي الدمج تجميعي.

Farah

Scanned by CamScanner

مبرهنة: إذا كانت S نصف زمرة ذات صفر ما، فإن S هي زمرة مع الصفر إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: ($aS = Sa = S$) , $\forall a \in S-\{0\}$

البرهان: لنفرض أن S زمرة مع الصفر ولنفرض أن $G = S-\{0\}$ فإن G تكون زمرة

$aG\cup\{0\} = Ga\cup\{0\} = G\cup\{0\} \Leftarrow (aG = Ga = G \;,\; \forall a\in G)$

$\Rightarrow aG\cup\{a0\} = Ga\cup\{0a\} = G\cup\{0\} \quad \forall a\in G$

$\Rightarrow a(G\cup\{0\}) = (G\cup\{0\})a = G\cup\{0\}$

$aS = Sa = S \quad \forall a\in S-\{0\}$

العكس: لنفرض أن الشرط محقق ($aS = Sa = S$) ($\forall a \in S-\{0\}$)

لنفرض أن $G = S-\{0\}$ مجموعة جزئية من S أي أن $G\neq\phi$ وذلك لأن $|S|>1$ إذا كان (وذلك لأنه لو كان خلاف ذلك فإن العبارة $\forall a\in S-\{0\}$ تفقد معناها) لنبين $b\in G$ ، من أجل $a,b\in G$ فإن $a.b\in G$ (أما لو كان خلاف ذلك لكان $a.b\notin G$) وأن $a.b\in S$ ، ومنه $ab=0$ ، وبالتالي:

$S^2 = S.S = Sa.bS = S0S = \{0\}$

نتيجة: $S = aS \subseteq S^2 = \{0\} \Rightarrow S = \{0\}$

(وهذا يناقض كون $|S|>1$) ، وبالتالي فإن G مغلقة بالنسبة للضرب أي أنه لكل $a\in G$ فإن $aG\subseteq G$, $Ga\subseteq G$

لنفرض جدلاً أن $aG=G$ إذا لم يكن كذلك فإن $aG\subset G$ وبالتالي فإن

$aS = a(G\cup\{0\})$

$= aG\cup\{0\} \subset G\cup\{0\} = S \Rightarrow aS\subset S \Rightarrow aS\neq S$

وهذا مخالف للفرض. أي أن $aG=G$ وبنفس الطريقة تماماً نبرهن أن $Ga=G$

ومنه $aG=Ga=G$ ، $\forall a\in G \Leftarrow G$ زمرة $\Leftarrow S = G^0$ هي زمرة مع الصفر

نصف الزمرة الجزئية، تعريف: إذا كانت $(S,*)$ نصف زمرة فإن المجموعة غير الخالية T من S تدعى نصف زمرة جزئية من S إذا كانت مغلقة بالنسبة للعملية * أي إذا حقق الشرط

$\forall x,y\in T \Rightarrow x*y\in T$

يمكن التعبير عن هذا الشرط باستخدام مفهوم جداء المجموعات فنقول أن T نصف زمرة جزئية من S إذا كان $T^2 \subseteq T$ نلاحظ أن S نفسها هي نصف زمرة جزئية من S كما أن $\{0\}, \{1\}$ هما نصفا زمرة جزئيتان من S إذا وجد في S عنصر حيادي وعنصر صفر

Farah Notebook

Scanned by CamScanner

/ /

تعريف: ان العنصر a من نصف الزمرة S يدعى عنصراً جامداً (او جامد) اذا كان $a^2=a$

- كما ان نصف الزمرة التي جميع عناصرها جامدة تدعى نصف زمرة جامدة (او عقدة)

- ان كل من العنصر المحايد والعنصر الصفري هو عنصر جامد ولكن العكس غير صحيح في الحالة العامة

ملاحظة: اذا كانت T مجموعة غير خالية من نصف الزمرة S فان T تكون زمرة جزئية من S اذا وفقط اذا تحقق الشرط $aT = Ta = T \quad , \forall a \in T$

البرهان: لنفرض الشرط متحقق ولنفرض ان T زمرة جزئية من S من الشرط $aT=T$ و $\forall a \in T$ يعني ان T مغلقة بالنسبة لعملية الضرب وبالتالي فهي نصف زمرة جزئية من S اي هي نصف زمرة تحقق الشرط وبالتالي من ملاحظة سابقة تكون T زمرة وبالتالي زمرة جزئية من S

العكس: نفرض ان T زمرة جزئية $\left\{ aT \subseteq T \; , \forall a \in T \right.$

$\left. \forall x \in T \ni e\, x \in T \Rightarrow a a^{-1} x \in aT \Rightarrow T \subseteq aT \right\}$

$\Rightarrow T = aT$ وبنفس الطريقة نبرهن $Ta = T$

Farah